EXERCICE№6

$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) f est dérivable sur IR et $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})}{1+x^2}$

$f'(x) = \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	2

Pour $x \neq 0$

$f(x) = 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = 0$

* f est continue et strictement croissante sur IR ,elle réalise donc une bijection de IR sur $f(IR) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f , \lim\limits_{x \to +\infty} f[=]\,0\,,\,2[$

2) * soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \in]\,0\,,\,2[$ et $y \in IR$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x - 1$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = (x-1)^2$ avec y et $(x-1)$ sont de même signe (*)

$\Leftrightarrow y^2 = (x-1)^2 + (x-1)^2 . y^2 \Leftrightarrow (2x - x^2)\, y^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow y\sqrt{2x - x^2} = x - 1$ d'après (*)

D'où : $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$; $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}}$